Zad. 1. Gibanje tijela u prostoru opisano je vektorom polžaja $\vec{r}(t)=2t^2\vec{i}-3t\vec{j}+t^3\vec{k}$. Odredite:

a) vektor brzine tijela i njegov iznos u m/s,
b) vektor akceleracije tijela i njegov iznos u m/s^2,

nakon *2 s* od početka gibanja.

Zad. 2. Dani su vektori $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j},\vec{b}=3\vec{i}+4\vec{j}$ i $\vec{c}=-2\vec{i}+\vec{j}$, odredite vektor $\vec{v}$ kolinearan s $\vec{c}$, a duljine jednake duljini vektora $\vec{a}+\vec{b}$.

Zad. 3. Uz pomoć definicije skalarnog produkta odredite kut između vektora $\vec{a}=3\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$ i $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$.

Zad. 4. Za koju će vrijednost parametra *m* vektori $\vec{a}=2\vec{i}+(m-1)\vec{j}-\vec{k}$ i $\vec{b}=m\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ biti međusobno okomiti?

Zad. 5. Ako je poznato: $\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}$, $\vec{F}=4\vec{i}-20\vec{j}+12\vec{k}$, $\vec{v}=2\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k}$, $q=2$ i $B_x=B_y$, odredite magnetsko polje $\vec{B}$.

Zad. 6. Izračunajte $3\vec{c}\cdot\ \ 2\vec{a}\times\vec{b}$ ako je zadano:
$\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k},\vec{b}=-3\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k},\vec{c}=7\vec{i}-8\vec{j}$.

Zad. 7. Izračunajte volumen paralelepipeda čiji su bridovi određeni vektorima $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k},\vec{b}=\vec{j}+\vec{k},\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}$.

Zad. 8. Polazeći od $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$ pokažite da iz $\vec{C}\times\vec{C}=\vec{0}$ slijedi $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$.

Zad. 9. Odredite jedinične vektore koji su okomiti na vektore:
a) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ i $\vec{i}$,
b) $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ i $\vec{j}+2\vec{k}$.

Zad. 10. Kinetička energija čestice dana je sa $E_k=\frac{1}{2}mv^2$. Za rotacijsko gibanje imamo $E_k=\frac{1}{2}m(\vec{\omega}\times\vec{r})^2$, jer je $\vec{\omega}\times\vec{r}=\vec{v}$. Pokažite da je $E_k=\frac{1}{2}m\left[r^2\omega^2-\ \ \vec{r}\cdot\vec{\omega}\ \ ^2\right]$.

Zad. 11. Odredite parcijalne derivacije funkcija:
a) $f(x,y)=2x^3y^2+y^3$,
b) $f(x,y)=\dfrac{3x^2+y}{y-x}$,

c) $f(x,y)=\sin\frac{x}{y}$,

d) $r(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$,

e) $z(x,y)=arc\,tg\,\frac{x-y}{1+x^2y^2}$,

f) $r(u,v)=\log_3\left(u^3v+\frac{v}{2u}\right)$,

g) $z \quad x,y \quad =\frac{\sin 2x}{\ln(\sin 2y)}$,

h) $u(x,y)=\sin^2(x+y)-\sin^2 x-\sin^2 y$,

i) $z(x,y)=\sqrt{y\sin x}$,

j) $z(x,y)=\frac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$,

k) $z(x,y)=\frac{e^y}{\sqrt{1+e^x+e^{2y}}}$.

Zad. 12. Za slučajeve pod a) i d) iz prethodnog zadatka odredite druge parcijalne derivacije, a za slučaj c) iz prethodnog zadatka pokažite da vrijedi: $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

Zad. 13. Pokažite da je $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$ ako je $z=xy+xe^{\frac{y}{x}}$.

Zad. 14. Pokažite da funkcija $u=arc\,tg\,\frac{y}{x}$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

Zad. 15. Dokažite da funkcija $z=e^{x/y}$ zadovoljava jednadžbu $y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}$.

Zad. 16. Dokažite da je $\frac{\partial^2 s}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=\frac{1}{x^2}$ ako je $s=\ln\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{t}\right)$.

Zad. 17. Pokažite da funkcija $u=xe^{-y/x}$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Zad. 18. Nađite parcijalne derivacije trećeg reda funkcije $u(x,y)=\frac{y}{x}$.

Zad. 19. Nađite totalne diferencijale funkcija:

a) $f(x,y)=\sin^2 x+\cos^2 y$,

b) $z(x,y)=yx^y$,

c) $z(x,t)=x\ln t$,

d) $z=arctg\frac{y}{x}+arctg\frac{x}{y}$,

e) $z(x,y)=\sqrt[6]{x+1-y^2}$,

f) $z(x,y)=\log_{12}\ \ -3x^2+6y^2+48$,

g) $u(x,y,z)=(xy+\frac{x}{y})^z$,

h) $r(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$.

Zad. 20. Odredite koji su od sljedećih diferencijala egzaktni:

a) $(3x+2)ydx+x(x+1)dy$,

b) $y\,tgx\,dx+x\,tgy\,dy$,

c) $y^2(\ln x+1)dy+2xy\ln xdx$,

d) $y^2(\ln x+1)dx+2xy\ln xdy$,

e) $\frac{x}{x^2+y^2}dy-\frac{y}{x^2+y^2}dx$.

Zad. 21. Pokažite da $df=x^2dy-(y^2+xy)dx$ nije egzaktan diferencijal, ali $dg=(xy^2)^{-1}df$ jest.

Zad. 22. Odredite derivaciju funkcije $f(x,y)=x^2+3xy$ s obzirom na x, s tim da je $y=arc\sin x$.

Zad. 23. Izračunajte $\frac{dz}{dt}$ ako je:

a) $z=\frac{x}{y}$, $x=e^t$, $y=\ln t$,

b) $z=e^{3x+2y}$, $x=\cos t$, $y=t^2$.

Zad. 24. Izračunajte $\frac{dw}{dt}$ za $w=x^3+xy^2$, $x=\cos t$, $y=\sin t$.

Zad. 25. Izračunajte $\frac{du}{dt}$ ako je $u = xyz$, gdje je $x = t^2 + 1, y = \ln t, z = tg\, t$.

Zad. 26. Odredite $\frac{dy}{dx}$ i $\frac{d^2 y}{dx^2}$ za implicitno zadane funkcije:

a) $\left(x^2 + y^2\right)^3 - 3\left(x^2 + y^2\right) + 1 = 0$,

b) $1 + xy - \ln\left(e^{xy} + e^{-xy}\right) = 0$.

Zad. 27. Pronađite jednadžbu tangente od $x^3 - 3y^3 + xy + 21 = 0$ u točki *(1, 2)*.

Zad. 28. Sfera radijusa 10 cm širi se zbog zagrijavanja. Odredite njen volumen kad joj se radijus poveća za 0.1 cm.

Zad. 29. Kositrena kutija cilindričnog oblika ima unutrašnji radijus 5 cm i unutrašnju visinu 10 cm, dok joj je debljina „plašta“ 0.13 cm. Odredite volumen kositra potreban da bi se načinila takva kutija.

Zad. 30. Odredite $\frac{\partial z}{\partial t}$ i $\frac{\partial z}{\partial s}$ za $z = xy, x = \sin(s + t), y = s - t$.

Zad. 31. Odredite $\frac{\partial u}{\partial s}$ i $\frac{\partial u}{\partial t}$ za $u = x^2 + 2xy - y\ln z, x = s + t^2, y = s - t^2, z = 2t$.

Zad. 32. Odredite $\frac{dz}{dt}$, ako je zadano $z = x - y, x^2 + y^2 = t^2, x\sin t = ye^y$.

Zad. 33. Odredite ekstreme funkcija:

a) $z(x, y) = (x-1)^2 - 2y^2$,

b) $z(x, y) = e^x - x + y^2 - 2y$,

c) $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$,

d) $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$,

e) $z(x, y) = x + 2y$ uz $x^2 + y^2 = 5$

f) $u(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}, \quad x > 0, y > 0, z > 0$

g) $u(x, y, z) = x - 2y + 2z$ za $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Zad. 34. Žica je savijena tako da čini krivulju $y = 1 - x^2$. Iz ishodišta do točke *(x,y)* je rastegnuta opruga. Odredite *(x,y)* za minimalnu duljinu opruge.

Zad. 35. Na krivulji $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ odredite točke najbliže ishodištu.

Zad. 36. Na krivulji $x^2+2xy+y^2-1=0$ odredite točke najbliže ishodištu.

Zad. 37. Pronađite najmanju udaljenost od ishodišta do ravnine $x-2y-2z=3$.

Zad. 38. Odredite volumen najveće kutije u obliku paralelepipeda koja je smještena unutar elipsoida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ na način da su joj bridovi paralelni s koordinatnim osima.

Zad. 39. Temperatura na pravokutnoj ploči ograničenoj sa $x=0,\ y=0,\ x=3$ i $y=5$ zadana je funkcijom: $T=xy^2-x^2y+100$.
Odredite točke najviše i najniže temperature na ploči.

Zad. 40. Odredite gradijente sljedećih funkcija:
a) $\Phi(x,y,z)=x^2y^3z^4$,
b) $\Phi(x,y,z)=e^x\cdot\sin y\cdot\ln z$.

Zad. 41. Nađite:
a) ∇u u točki $(1,2,3)$ ako je $u=xyz$,
b) ∇w u točki $(1,2,-1)$ ako je $w=x^2y^3z$.

Zad. 42. Ako je $S(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$ odredite:
a) ∇S u točki $(1,2,3)$,
b) $|\nabla S|$ u točki $(1,2,3)$,
c) kosinuse smjera od ∇S u točki $(1,2,3)$.

Zad. 43. Odredite iznos i kosinuse smjerova od ∇u u točki $(2,-2,1)$, ako je $u=x^2+y^2+z^2$.

Zad. 44. Odredite kut među gradijentima funkcije $z(x,y)=\ln\frac{y}{x}$ u točkama $A\ \frac{1}{2},\frac{1}{4}$ i $B\ 1,1$.

Zad. 45. Nađite jedinični vektor okomit na površinu $x^2+y^2+z^2=3$ u točki $(1,1,1)$.

Zad. 46. Odredite smjer pravca okomitog na površinu $x^2y+y^2z+z^2x+1=0$ u točki $(1,2,-1)$.

Zad. 47. Dan je vektor $\hat{r}_{12}=(x_1-x_2)\vec{i}+(y_1-y_2)\vec{j}+(z_1-z_2)\vec{k}$. Pokažite da je $\nabla_1 r_{12}$ jedinični vektor u smjeru $\hat{r}_{12}$.

Zad. 48. Dokažite da za bilo koje dvije diferencijabilne skalarne funkcije Φ i Ψ vrijedi jednakost: $\nabla(\Phi\Psi) = \Phi\nabla\Psi + \Psi\nabla\Phi$.

Zad. 49. Pronađite derivaciju funkcije $f(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^4$ u smjeru vektora $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ u točki $(-1,0,1)$.

Zad. 50. Pronađite derivaciju funkcije $f(x,y,z) = \sin x + y^2 \ln z - \dfrac{x^2}{z^2}$ u smjeru vektora $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ u točki $(0,1,2)$.

Zad. 51. Ako je potencijal pravokutne distribucije naboja dan s $\Phi(x,y,z) = \dfrac{Cxy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$, nađite električno polje.

Zad. 52. Neka je dano vektorsko polje $\vec{F} = (xy^2 + z)\vec{i} + (x^2 y + 2)\vec{j} + x\vec{k}$. Odredite skalarno polje Φ tako da vrijedi $\vec{F} = \nabla\Phi$.

Zad. 53. Odredite:
a) $\nabla\vec{a}$ i
b) $\nabla\times\vec{a}$,
ako je vektorsko polje $\vec{a}$ dano sa: $\vec{a} = x^2y^2z^2\vec{i} + y^2z^2\vec{j} + x^2z^2\vec{k}$.

Zad. 54. Izračunajte divergenciju i rotaciju sljedećih vektorskih polja, zadanih njihovim koordinatama:
a) $F_x = x + y, F_y = -x + y, F_z = -2z$,
b) $G_x = 2y, G_y = 2x + 3z, G_z = 3y$,
c) $H_x = x^2 - z^2, H_y = 2, H_z = 2xz$.

Zad. 55. Dana je vektorska funkcija $\vec{A} = x(x^2+y^2)\vec{i} + y(x^2+y^2)\vec{j}$. Izračunajte $div\vec{A}$ i $rot\vec{A}$.

Zad. 56. Elektrostatsko polje točkastog naboja q je $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{\hat{r}}{r^2}$. Izračunajte $\nabla\vec{E}$.

Zad. 57. Zadano je vektorsko polje $\vec{F} = 2xz\vec{i} + 2yz^2\vec{j} + (x^2 + 2y^2z - 1)\vec{k}$. Izračunajte $\nabla\times\vec{F}$ i pronađite skalarno polje Φ za koje vrijedi $\vec{F} = \nabla\Phi$.

Zad. 58. Ako je $\vec{V} = V_x(x,y)\vec{i} + V_y(x,y)\vec{j}$ i $\nabla\times\vec{V} \neq 0$, pokažite da je $\nabla\times\vec{V}$ okomito na $\vec{V}$.

Zad. 59. Klasično, angularni moment dan je s $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Kako bismo prešli iz klasične u kvantnu mehaniku *p* mijenjamo operatorom $-i\nabla$. Pokažite daj e kvantno-mehanički operator kutnog momenta u Kartezijevom koordinatnom sustava zadan sa:

$$L_x = -i\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} \right), L_y = -i\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} \right), L_z = -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \right).$$

Zad. 60. Pokažite da za skalarnu funkciju φ vrijedi $\nabla \times \ \varphi \cdot \nabla\varphi \ = 0$.

Zad. 61. Ako je vektorska funkcija $\vec{F}(x, y, z, t)$, funkcija prostornih koordinata i vremena, pokažite da vrijedi: $d\vec{F} = \ d\vec{r} \cdot \nabla \ \vec{F} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} dt$.

Zad. 62. Odredite Laplasijan skalarnog polja $\Phi = xy^2 z^3$.

Zad. 63. Dokažite:

a) $\nabla \ \vec{u} \times \vec{v} \ = \vec{v} \ \nabla \times \vec{u} \ - \vec{u} \ \nabla \times \vec{v}$,

b) $\nabla \times \ \nabla \times \vec{a} \ = \nabla \ \nabla \vec{a} \ - \Delta \vec{a}$.

Zad. 64. Koristeći izraz za trostruki vektorski produkt $\vec{A} \times \ \vec{B} \times \vec{C} \ = \vec{B} \ \vec{A} \cdot \vec{C} \ - \vec{C} \ \vec{A} \cdot \vec{B}$, pokažite da vrijedi $\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A}$.

Zad. 65. Odredite koeficijente h_i u:
a) sfernom i
b) cilindričnom koordinatnom sustavu.
Koristeći relaciju $g_{ij}=\sum_l \frac{\partial x_l}{\partial q_i}\frac{\partial x_l}{\partial q_j}$ provjerite radi li se o ortogonalnim koordinatnim sustavima.

Zad. 66. Odredite Jacobijan za cilindrične i sferne koordinate.

Zad. 67. Odredite d^2s za cilindrične i sferne koordinate:
a) uz pomoć koeficijenata h_i,
b) uz pretpostavku da ne poznajete koeficijente h_i.

Zad. 68. Izrazite $\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}$ u sfernim koordinatama.

Zad. 69. U cilindričnim i sfernim koordinatama odredite komponente brzine i akceleracije čestice u gibanju.

Zad. 70. Odredite gradijente sljedećih skalarnih funkcija u odgovarajućim koordinatnim sustavima:
a) $\Phi(r,\theta,\varphi)=r\ \ \cos\theta+\sin\theta\cos\varphi\ \ ,$
b) $\Phi(\rho,\varphi,z)=\rho(\sin\varphi)z^2,$
c) $\Phi(r,\theta,\varphi)=r^2\cos\varphi+e^{-r\cos^2\theta\sin\varphi}$ u $(1,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}),$
d) $\Phi(\rho,\varphi,z)=\frac{\sin\varphi}{\rho^2-z\cos\varphi}.$

Zad. 71. Odredite gradijent funkcije $f(r,\theta,\varphi)=r\sin\theta\cos^2\varphi-\ln(r^2\cos^2\theta)$ u $(2,\pi,\frac{\pi}{4}).$

Zad. 72. Zapišite $\vec{r}$ u cilindričnim koordinatama, te odredite divergenciju i rotaciju dobivene vektorske funkcije.

Zad. 73. Kruto tijelo rotira oko fiksne osi konstantnom kutnom brzinom $\vec{\omega}=\omega\hat{z}$. U cilindričnom koordinatnom sustavu odredite:
a) $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r},$
b) $\nabla\times\vec{v}.$

Zad. 74. Izračunajte divergenciju i rotaciju vektorskog polja danog s:
$\vec{A}=\hat{r}r^2\cos\theta+\overset{\frown}{\theta}r+\overset{\frown}{\varphi}\sin\theta.$

Zad. 75. Polje sile dano je u sfernom koordinatnom sustavu sa $\vec{F} = \frac{2p\cos\theta}{r^3}\hat{r} + \frac{p\sin\theta}{r^3}\hat{\theta}$. Provjerite je li sila konzervativna. (napomena! Rotacija konzervativne sile jednaka je nuli.)

Zad. 76. Vodljiva žica dužz osi nosi struju I. Vektorski potencijal je dan s: $\vec{A} = \hat{z}\frac{\mu I}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{\rho}\right)$. Pokažite da je magnetska indukcija: $\vec{B} = \widehat{\varphi\frac{\mu I}{2\pi\rho}}$.

Zad. 77. Vektorski potencijal jednoliko nabijene sfere je

$$\vec{A} = \begin{cases} \hat{\varphi}\frac{\mu_0 a^4 \sigma\omega}{3}\frac{\sin\theta}{r^2}, & r>a \\ \hat{\varphi}\frac{\mu_0 a\,\sigma\omega}{3} r\cos\theta, & r<a \end{cases},$$

a je radijus sfere, σ površinska gustoća naboja, a ω kutna brzina. Nađite magnetsku indukciju.

Zad. 78. Odredite $\Delta\Psi$, $\Psi = r\cos\theta\sin\varphi$.

Zad. 79. Odredite $\Delta\Psi$ u sfernom koordinatnom sustavu, $\Psi(x, y, z) = \frac{zx^2}{x^2 + y^2 + z^2}$.

Zad. 80. Vektorska funkcija dana je u cilindričnom koordinatnom sustavu izrazom: $\vec{B} = B(\rho)\widehat{\varphi}$. Odredite $\nabla\times\left[\ \vec{B}\cdot\nabla\ \ \vec{B}\right]$.

Zad. 81. a) Pokažite da za kvantno mehanički operator orbitalnog angularnog momenta definiranog sa $\vec{L} = -i\ \ \vec{r}\times\nabla$ vrijedi: $\vec{L} = i\left(\widehat{\theta\frac{1}{\sin\theta}}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \widehat{\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}}\right)$.

b) Pokažite da vrijedi: $\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} - i\frac{\vec{r}\times\vec{L}}{r^2}$.

Zad. 82. Zadana je krivulja $y = x^2$ od *x = 0* do *x = 1*. Odredite:
a) površinu ispod krivulje,
b) masu dijela ravnine površine izračunate pod a) čija je površinska gustoća *xy*,
c) duljinu luka krivulje,
d) centroid površine,
e) centroid luka,
f) momente tromosti oko x, y i z osi uz uvjete dane pod b).

Zad. 83. Rotiramo li površinu iz prethodnog zadatka oko x-osi dobijemo rotirajuću plohu koja obuhvaća određeni volumen. Pronađite:
a) taj volumen,

b) moment tromosti oko x-osi za kruto tijelo konstantne gustoće ρ koje zauzima dani volumen,
c) površine zakrivljene plohe.

Zad. 84. Za krivulju $y=\sqrt{x}$ između $x = 0$ i $x = 2$. Odredite:
a) površinu ispod krivulje,
b) volumen koji obuhvaća ploha koja se dobije kad površinu rotiramo oko x-osi,
c) površinu dobivene plohe,
d) masu žice zadanog oblika čija je linearna gustoća proporcionalna s $\sqrt{x}$.

Zad. 85. Prelaskom na cilindrične koordinate izračunajte:

$$I=\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz .$$

Zad. 86. Neka je $\vec{F}=-y\vec{i}+x\vec{j}$. Odredite W od ishodišta do točke (1,1) odabirom tri različita puta.

Zad. 87. Zadano je polje sile koja djeluje na dvodimenzionalni LHO: $\vec{F}=-kx\vec{i}-ky\vec{j}$.
Usporedite rad načinjen gibajući se suprotno od orijentacije polja sile od *(1,1)* do *(4,4)* po pravocrtnim putovima:
a) $(1,1) \rightarrow (4,1) \rightarrow (4,4)$
b) $(1,1) \rightarrow (1,4) \rightarrow (4,4)$
c) $(1,1) \rightarrow (4,4)$ duž pravca $x = y$.

Zad. 88. Odredite rad kojeg napravi sila $\vec{F}=(x-y)\vec{i}+(x+y)\vec{j}$ od (1,1) do (3,3).

Zad. 89. Odredite rad načinjen gibajući se po kružnici u xy ravnini:
a) suprotno od smjera kazaljke na satu od 0 do π,
b) u smjeru kazaljke na satu od 0 do –π,
protiv polja sile $\vec{F}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}\vec{i}+\dfrac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$.

Zad. 90. Izračunajte linijski integral $I=\int_C \vec{a}\,d\vec{r}$, gdje je $\vec{a}=(x+y)\vec{i}+(y-x)\vec{j}$ duž:
a) parabole $y^2=x$ od (1,1) do (4,2),
b) krivulje $x=2u^2+u+1$, $y=1+u^2$ od (1,1) do (4,2),
c) pravca $y = 1$ od (1,1) do (4,1), a zatim $x = 4$ od (4,1) do (4,2).

Zad. 91. Izračunajte cirkulaciju vektorskog polja $\vec{A}=-y\vec{i}+x\vec{j}+c\vec{k}$, $c\in R$ duž:
a) $x^2+y^2=1, z=0$,
b) $(x-2)^2+y^2=1, z=0$.

Zad. 92. Zadana je vektorska funkcija $\vec{A}=(x^2-y)\vec{i}+(y^2-z)\vec{j}+(z^2-x)\vec{k}$. Izračunajte vrijednosti integrala $\int_C \vec{A}d\vec{r}$ duž krivulje parametrizirane na način:

$x=a\cos\varphi,\ y=a\sin\varphi,\ z=b\varphi$, od $\varphi=0$ do $\varphi=2\pi$.

Zad. 93. Izračunajte $\int_C \vec{A}d\vec{r}$, gdje je $\vec{A}=x\vec{i}+y\vec{j}+(x+y-1)\vec{k}$, a C dio pravca između točaka (1,1,1) i (2,3,4).

Zad. 94. Odredite rad kojeg izvrši sila $\vec{F}=x^2\vec{i}+y\vec{j}+\cos z\vec{k}$ duž zavojnice $x = a\ cost$, $y = a\ sint$, $z = 2t$ od točke $t = 0$ do $t=\frac{3\pi}{2}$.

Zad. 95. Zadano je polje sile $\vec{F}=(y+z)\vec{i}-(x+z)\vec{j}+(x+y)\vec{k}$. Odredite rad sile na zadanoj putanji:
a) kružnica $x^2+y^2=1$ u xy-ravnini, suprotno od smjera kazaljke na satu;
b) kružnica $x^2+z^2=1$ u xz-ravnini, suprotno od smjera kazaljke na satu;
c) od ishodišta po x-osi do točke (1,0,0), zatim paralelno sa z-osi do točke (1,0,1), pa paralelno s yz-ravninom do točke (1,1,1) i natrag u ishodište uz x = y = z;
d) od ishodišta do (0,0,2π) po $x = 1\text{-}cost$, $y = sint$, $z = t$ i natrag do ishodišta po z-osi.

Zad. 96. Izračunajte $\frac{1}{3}\iint_S \vec{r}\cdot d\vec{\sigma}$, gdje je S površina jedinične kocke.

Zad. 97. Zadano je polje sile $\vec{F}=x\vec{i}+y\vec{j}$ i ploha $z=4-x^2-y^2$. Odredite $\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$.

Zad. 98. Dokažite identitete:

a) $\iiint_V \Phi\, div\vec{A}dV=\oint\!\!\!\oint_S \Phi\vec{A}d\vec{S}-\iiint_V \vec{A}grad\Phi dV$,

b) $\iiint_V \vec{A}(\nabla\times\vec{B})dV=\iiint_V \vec{B}(\nabla\times\vec{A})dV-\oint\!\!\!\oint_S (\vec{A}\times\vec{B})d\vec{S}$.

Zad. 99. Dokažite da vrijedi: $\oint\!\!\!\oint_S \left(\varphi\nabla\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\nabla\varphi\right)d\vec{S}+\iiint_V \frac{1}{r}\nabla^2\varphi dV=0$,

gdje je r udaljenost točke M od ishodišta koordinatnog sustava koja leži van volumena V ograničenog zatvorenom plohom S, a φ je skalarna funkcija točke M.

Zad. 100. Pokažite da Maxwellova jednadžba $\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ može biti zapisana u obliku $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\dfrac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$, gdje je S površina omeđena zatvorenom krivuljom C.

Zad. 101. Koristeći Gaussov teorem izračunajte tok vektorskog polja $\vec{A} = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$ kroz vanjsku stranu sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Zad. 102. Izračunajte tok vektorskog polja $\vec{A} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ kroz vanjski dio sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ koji pripada prvom oktantu.

Zad. 103. Izračunajte tok vektorskog polja $\vec{A} = (x - 2z)\vec{i} + (3z - 4x)\vec{j} + (5x + y)\vec{k}$ kroz površinu piramide koja ima vrhove u (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) i (0,0,0):
a) „uobičajenim“ integriranjem,
b) pomoću Gaussovog teorema.

Zad. 104. Zadano je vektorsko polje $\vec{A} = -y\vec{i} + x\vec{j}$. Izračunajte integral $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$ po kružnici $x^2 + y^2 = 1, z = 0$. Pokažite da vrijedi Stokesov teorem računajući površinski integral od $\nabla \times \vec{A}$ po površini omeđenoj zadanom krivuljom.

Zad. 105. Pomoću Stokesovog teorema izračunajte cirkulaciju vektora $\vec{a} = x^2 y^3 \vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$ duž kružnice $x^2 + y^2 = R, z = 0$ ako se za plohu odabere polusfera $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Zad. 106. Neka je zadana ploha $z = 4 - x^2 - y^2,\ z \geq -3$ i vektorska funkcija $\vec{F} = (2xyz + 3z)\vec{i} + x^2 y\vec{j} + \cos(xyz)e^x \vec{k}$. Izračunajte $\iint_S \nabla \times \vec{F}\ \ d\vec{S}$.

Zad. 107. Koristeći teorem o divergenciji izračunajte integral $I = \iint_S \vec{a} \cdot d\vec{S}$, gdje je $\vec{a} = (y - x)\vec{i} + x^2 z\vec{j} + (z + x^2)\vec{k}$, a S polusfera $x^2 + y^2 + z^2 = a,\ z \geq 0$.

Zad. 108. Odredite $I = \iint_S \vec{a} \cdot d\vec{S}$, $\vec{a} = x\vec{i}$, S je polusfera $x^2 + y^2 + z^2 = a,\ z \geq 0$.